Hilbert modular群のEisenstein級数について(整数論と保型形式)

三宅, 敏恒

数理解析研究所講究録
689 巻 1989 年 72-78

Hilbert modular群のEisenstein級数について

北海道大学　三宅　敏恒 (Toshitsune Miyake)

正則な保型形式の空間が cusp 形式と Eisenstein 級数によって生成されることは classical によく知られている．この事実は，Hilbert modular群については，正則でない保型形式についてもなりたつ ([Shimura],[Shimizu],[Miyake])．以下においてはこのことを主として[Shimura]に従って述べる．特に３節で述べる cyclopean form は L関数の零点と関係し重要である．

１．　Ｆをｎ次の総実な代数体とし　ＲをＦの整数環とする．　Ｆの無限素点の集合を$V=\{v\}$と書く．　一般に集合Ｘに対して　X^V でＸの copy のｎ個の積を表す．　$x=(x_v)_v$，$c=(c_v)_v$ が$\mathbf{C}^V$の元であるとき，

$$x^c=\prod_v x_v^{c_v},\qquad c\cdot x=\sum_v c_v x_v$$

とおく（右辺が意味をもつとき）．　また $u=(1,\cdots,1)\in\mathbf{C}^V$とおくと特に

$$x^u=\prod_v x_v,\qquad u\cdot x=\sum_v x_v .$$

<u>$SL_2(F)$ の合同部分群</u>：　Ｆのイデアル Ｉ にたいし，

$$\Gamma(I)=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in SL_2(R)\ \middle|\ a-1,\ b,\ c\in I\right\}$$

とおく．　$SL_2(F)$ の部分群 Γ が合同部分群とは Γ がある $\Gamma(I)$ を指数有限の部分群としてふくむときにいう．

<u>weight</u>: $\sigma\in\mathbf{Q}^V$ が weight であるとは，つぎの（１）または（２）のいずれかのときにいう．

（1） $\sigma\in\mathbb{Z}^V$ （σはintegral weight という），

（2） $\sigma\in(1/2)u+\mathbb{Z}^V$ （σはhalf integral weight という）．

<u>群の作用</u>： Hは上半平面とする． $z\in H$, $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\alpha z=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad j(\alpha,z)=cz+d$$

とおく． $SL_2(\mathbb{R})$ は $z\to\alpha z$ によりHに作用する．よって，$\alpha=(\alpha_v)\in SL_2(\mathbb{R})^V$, $z=(z_v)\in H^V$ とすると $z\to\alpha z=(\alpha_v z_v)$ により，$SL_2(\mathbb{R})^V$ は H^V に作用する． $SL_2(F)$ は$SL_2(\mathbb{R})^V$ に自然に埋め込まれるから、$SL_2(F)$はH^V に作用する． $z\in H^V$, $\alpha\in SL_2(\mathbb{R})^V$, $\sigma\in\mathbb{Z}^V$ に対して

$$j(\alpha,z)=(j(\alpha_v,z_v))_v,$$
$$j(\alpha,z)^\sigma=\Pi j(\alpha,z_v)^{\sigma_v}$$

とおく．

<u>微分作用素</u>： $z=(z_v)\in H^V$, $z_v=x_v+iy_v$ としたとき， H^V の微分作用素L_v^σ （σ=weight)を次のように定義する．

$$L_v^\sigma=-y_v(\partial^2/\partial x_v^2+\partial^2/\partial y_v^2)+2i\sigma_v y_v\partial/\partial\overline{z}_v).$$

<u>metaplectic group</u>：weight σ に対して metaplectic group $G=G_\sigma$ を

$$G=\{(\alpha,\ l(z))\ \left|\ \begin{array}{l}\alpha\in SL_2(F), l(z)^2=t\,j(\alpha,z)^{2\sigma}\\ t\in\mathbf{C},\ |t|=1\end{array}\right.\}$$

と定義する． Gは次のように積を定義すると，群になる．

$$(\alpha,\ l(z))(\alpha',l'(z))=(\alpha\alpha',l(\alpha'z)l'(z)).$$

Gから$SL_2(F)$ への写像 $(\alpha,l)\to\alpha$ を pr で表す． さて，

$$\theta(z) = \sum_{m\in R} e(m^2 z/2), \quad e(*)=\exp(2\pi i *)$$

とおき，$h(\alpha, z)=\theta(\alpha z)/\theta(z)$ とすると、Iが十分大きければ、

$$h(\alpha, z)^2 = t\, j(\alpha, z)^u, \qquad |t|=1, \ \alpha\in\Gamma(I).$$

embedding Λ： $SL_2(F)$ 又は$\Gamma(I)$からGへのembedding Λを次のように定義する．

（1） σが integral weight のとき $\Lambda: SL_2(F)\to G$で

$$\Lambda(\alpha)=(\alpha, \ j(\alpha, z)^{\sigma}).$$

（2） σが half integral weight のとき $\Lambda: \Gamma(I)\to G$で

$$\Lambda(\alpha)=(\alpha, \ h(\alpha, z)\, j(\alpha, z)^{\sigma-u/2}).$$

Gの合同部分群： Gの部分群Δが合同部分群であるとは、次の（1），(2）をみたすときにいう．

（1） pr はΔから$SL_2(F)$の合同部分群への同形写像である．

（2） Δは十分大きなIに対し，$\Lambda(\Gamma(I))$ を指数有限の部分群として含む．

ΔがGの合同部分群ならば，$\xi\in G$に対し $\xi^{-1}\Delta\xi$ も合同部分群である．

Gの作用： $\xi=(\alpha, \ l(z))\in G$とする．H上の関数 $f(z)$ に対し，ξの作用を

$$(f\,\|\,\xi)(z)=l^{-1}(z)f(\alpha z)$$

と定義する． 以下便宜上$\alpha=(\alpha, \ 1(z))$ と書く．

automorphic eigen form: ΔがGの合同部分群とする． H^V上のC^∞ー関数 $f(z)$ がΔに関する automorphic eigen form であるとは、次の（1),(2),(3）がみたされるときにいう．

（1） $f\,\|\,\alpha=f \qquad (\alpha\in\Delta),$

（2） $L_v^{\sigma} f=\lambda_v f, \qquad \lambda_v\in\mathbf{C}, \quad (v\in V),$

（3） $y_v^{\sigma/2}\,|(f\,\|\,\xi)(x+iy)|\leqq A\,y^{cu}, \quad y^u>B \ (\xi\in G).$

$\lambda=(\lambda_v)\in\mathbf{C}$ を eigen value の system という． $A(\sigma, \lambda; \Delta)$で$\lambda$をeigen value の system にもつΔに関する weight σ の automorphic eigen form のなす空間とする． $f(z)$が$A(\sigma, \lambda, \Delta)$ の元とする．

$$\Delta \supset \Lambda(\Gamma(I)), \qquad \Gamma(I) \supset \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid m \in L \right\},\ L: \text{lattice}$$

であるから，$f(z)$は次のような Fourier 展開をもつ．

$$f(z) = b_0(y) + \sum_{h \in L'} b_h(y) e(h \cdot x), \quad L':\text{dual lattice}.$$

この$b_0(y)$を$f(z)$の定数項という．

<u>cusp form</u>: $f \in A(\sigma, \lambda, \Delta)$ が cusp form であるとは，任意の$\alpha \in G$に対して $f \| \alpha$ の Fourier 展開の定数項$=0$の時にいう． cusp form のなす部分空間を$S(\sigma, \lambda, \Delta)$とおく．$f \in A(\sigma, \lambda, \Delta)$, $g \in S(\sigma, \lambda, \Delta)$に対して、正則な保型形式の場合と同様に Petersson 内積が定義され、この内積に関する$S(\sigma, \lambda, \Delta)$の直交補空間を $N(\sigma, \lambda, \Delta)$と書く．

<u>Eisenstein 級数</u>: $P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(F) \mid c = 0 \right\}$ とおき、更に $Q = \{\alpha \in G \mid pr(\alpha) \in P\}$ とおく． $Q \backslash G / \Delta$ の各類を cusp class という．$\rho = (\sigma - i\tau)/2 \in \mathbf{C}^V$ （σ : weight, $\alpha \in \mathbf{R}^V$ ）とする． cusp class $Q\xi\Delta$がρ-regular であるとは，$y^{-\rho} \| \gamma = y^{-\rho}$が $Q \cap \alpha\Delta\alpha^{-1}$の任意の元$\gamma$について成り立つときにいう．このとき，

$$E(z, s\,;\, \rho, \Delta) = \begin{cases} \sum_{\alpha} y^{su-\rho} \| \alpha & (Q\Delta : \rho\text{-regular}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ここで，αは$Q \cap \Delta \backslash \Delta$の代表系を動く．更に cusp class $Q\xi\Delta$に対し，

$$E_\xi(z, s\,;\, \rho, \Delta) = E(z, s\,;\, \rho, \xi\Delta\xi^{-1}) \| \xi$$

とおく． $E_\xi(z, s\,;\, \rho, \Delta)$ を Eisenstein 級数という．E_ξ は $\mathrm{Re}(z)$ が十分大きいときに収束し，sに関して全平面に有理型に解析接続される．$E_\xi(z, s\,;\, \rho, \Delta)$ で生成される空間を，$\mathbb{E}(\rho, \Delta)$ と書く．

<u>定理1</u> $E_\xi(z, s\,;\, \rho, \Delta)$ が$s = s_0$ で正則ならば，

$$E_\xi(z, s\,;\, \rho, \Delta) \in A(\sigma, \lambda, \Delta).$$

ここで$\lambda=(\lambda_v)$, $\lambda_v=(s_0-\rho_v)(1-s_0-\overline{\rho}_v)$ である.

$\mathbb{E}(\rho, \Delta)$ の元が全て $s=s_0$ で正則であるとき,

$$\mathbb{E}(\rho, \Delta)(s_0)=\{f(z, s_0) \mid f(z, s)\in\mathbb{E}(\rho, \Delta)\}$$

とおく. λを定理1のように取ると, $\mathbb{E}(\rho, \Delta)(s_0)$はA$(\sigma, \lambda, \Delta)$の部分空間である.

<u>exponent</u>: 逆に$\lambda\in\mathbf{C}^V$ が与えられたとする. 簡単のために

$$X^2+(\sigma_v-1)X-\lambda_v=0$$

が全てのvについて重根を持たないとする (λは non-critical という).

$\tau\in\mathbb{R}^V$ が admissible とはFの単数群のある指数有限な部分群Uに対して

$$|a|^{i\tau}=0 \qquad (a\in U)$$

のときにいう. λが non-critical のとき

$$C(\sigma, \lambda) = \left\{p\in\mathbf{C}^V \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ は} X^2+(\sigma_v-1)X-\lambda_v=0 \text{の根} \\ p=s_p u-(\sigma-i\tau)/2 \\ s_p\in\mathbf{C}, \quad \tau:\text{admissible} \end{array} \right\}$$

とおく. $p=s_p u-(\sigma-i\tau)/2$ のときに

$$\rho_p=(\sigma-i\tau)/2, \qquad p'=u-\sigma-p$$

とおく. $C(\sigma, \lambda)$ の元を weight σ, eigen value の system λに属する exponent という. $C(\sigma, \lambda)$ に$p\sim p'$ $(=u-\sigma-p)$ という同値関係を入れる. この同値関係による$C(\sigma, \lambda)$ の代表系を$C_0(\sigma, \lambda)$ とおくと

$$C(\sigma, \lambda)=C_0(\sigma, \lambda)\cup\{p' \mid p\in C_0\}.$$

さて introduction に述べたように automorphic eigen form の空間の cusp form の空間の 直交補空間が Eisenstein級数で生成されることを 次のように述べることができる.

<u>定理2</u> 任意の$p\in C_0(\sigma, \lambda)$ に対して、$\mathbb{E}(\rho_p, \Delta)$, $\mathbb{E}(\overline{\rho}_p, \Delta)$の元は全て$s_p$で正則と仮定すると,

$$N(\sigma, \lambda, \Delta)=\bigoplus_{p\in C_0}\mathbb{E}(\rho_p, \Delta)(s_p).$$

定理２の条件が成り立たない場合には，右辺を少し修正して，正則でないものについては s_p における Eisenstein 級数の residue を考えれば同様の主張が成り立つ．定理２は Maass-Selberg の bilinear relation を用いて示される([Shimura],[Shimizu],[Miyake])．

２． <u>multiple eigen value system</u>: $\#C(\sigma, \lambda)=2$ のとき λ は simple といい，$\#C(\sigma, \lambda)>2$ のとき λ は multiple であるという．Eisenstein 級数の空間の次元を決定するには，$C(\sigma, \lambda)$ の個数が分かればいい．Fが実２次体とし，Fの無限素点の集合を $\{v, w\}$ とする．ε をFの単数とし $\theta_v \in \mathbf{R}$ を $\varepsilon^{2i\theta_v}=1$ に取り $\theta=(\theta_v, -\theta_v)$ とおく．

$$p=su-(\sigma-im\theta)/2, \qquad s=(1+in\theta_v)/2,$$
$$q=tu-(\sigma-in\theta)/2, \qquad t=(1+im\theta_v)/2$$

とおく． さらに，

$$\lambda_v=p_v p'_v=((1-\sigma_v)/2)^2+((m+n)/2)^2\theta_v^2,$$
$$\lambda_w=p_w p'_w=((1-\sigma_w)/2)^2+((m-n)/2)^2\theta_v^2$$

とし $\lambda=(\lambda_v, \lambda_w)$ とおく．p, p', q, q' は全て異なり $C(\sigma, \lambda)$ の元である． よってこの λ は multiple である．もう少し一般に，Kは上のFを含む総実な体とし，Kの無限素点の中でvの拡張を $v_1, \cdots, v_n$，wの拡張を $w_1, \cdots, w_n$ とする．$\tau \in \mathbf{R}^V$ を

$$\tau_{v_i}=\theta_v, \qquad \tau_{w_i}=\theta_w \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

とおき，更に

$$p=su-(\sigma-im\tau)/2, \qquad s=(1+in\theta_v)/2,$$
$$q=tu-(\sigma-in\tau)/2, \qquad t=(1+im\theta_v)/2,$$
$$\lambda_{v_i}=\lambda_v, \qquad \lambda_{w_i}=\lambda_w \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

とおくと λ は multiple となり，p, p', q, q' は $C(\sigma, \lambda)$ の元である． multiple な eigen value の system が存在するのは このようにして得られる場合しかないのではないかと思われる． 単数群の構造をこのような観点から調べることは興味ぶかい．

3. <u>cyclopean form</u>: $f(z)\in A(\sigma, \lambda, \Delta)$が exponent q の cyclopean form であるとは，λが simple で

$$f\,\|\,\alpha = b\,y^{q} + (\text{non-constant な項}) \quad (\text{for any } \alpha\in G).$$

このとき　$q=(1-s_0)-\overline{\rho}$，$\rho=(\sigma-i\tau)/2$　であり，更に

$$1/2>\mathrm{Re}(s_0)>0 \qquad (\sigma : \text{integral}),$$
$$1/2>\mathrm{Re}(s_0)>1/4 \qquad (\sigma : \text{half integral})$$

のときにいう．cyclopean form の存在と，L－関数の零点の存在は次のように関係する．

<u>定理3</u> [Shimura] exponent q の cyclopean form が存在する必要十分な条件は，次の（1），（2）をみたす Hecke character ψ が存在することである．

（1） $\psi_{\infty}(x)=|x|^{\pm i\tau}(x/|x|)^{\sigma}$ $\qquad (x\in F_{\infty}^{\times}).$

（2） $L(2s_0, \psi)=0$ $\qquad (\sigma : \text{integral weight})$

$L(4s_0-1, \psi^2)=0$ $\qquad (\sigma : \text{half integral weight}).$

<u>References</u>

Shimura, G. On the Eisenstein series of Hilbert modular group, Revista Matemática Iberoamericana, 1 (1985), 1-42.

Shimizu, H. The Space of Eisenstein Series in the case of GL_2, Advanced Studies in Pure Mathematics 13 (1988), 585-621.

Miyake, T. On the Spaces of Eisenstein Series of Hilbert Modular Groups, Revista Matemática Iberoamericana 3 (1987).